

第5章 谓词逻辑的等值和推理演算

- 谓词逻辑研究的对象是重要的逻辑规律，普遍有效式是最重要的逻辑规律
- 等值和推理演算是谓词逻辑的基本内容
- 同命题逻辑相比，由于量词谓词的引入，使谓词演算有着广泛的应用
- 这章的讨论，主要是以语义的观点进行的非形式的描述，而严格的形式化的讨论见第6章所建立的公理系统

5.1 否定型等值式

- 若给定了两个谓词公式**A**，**B**，说**A**和**B**是等值的，如果在公式**A**，**B**的任一解释下，**A**和**B**都有相同的真值

在谓词逻辑中，需要给出解释的内容包括(见P65):

(1) 论域

(2) 谓词变项

(3) 命题变项

(4) 函数

(5) 自由个体

- 等价的说法:

A，**B**等值当且仅当 **$A \leftrightarrow B$** 是普遍有效的公式

记作 **$A = B$** 或 **$A \leftrightarrow B$**

5.1.1 由命题公式移植来的等值式

- 若将命题公式的等值式，直接以谓词公式代入命题变项便可得谓词等值式。由

$$\neg\neg p = p, p \rightarrow q = \neg p \vee q, (p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

可得

1. $\neg\neg P(x) = P(x)$

2. $\neg\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)P(x)$

3. $P(x) \rightarrow Q(x) = \neg P(x) \vee Q(x)$

4. $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x) = \neg(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$

5. $(P(x) \wedge Q(x)) \vee R(x) = (P(x) \vee R(x)) \wedge (Q(x) \vee R(x))$

6. $((\forall x)P(x) \wedge Q(y)) \vee (\exists z)R(z)$
 $= ((\forall x)P(x) \vee (\exists z)R(z)) \wedge (Q(y) \vee (\exists z)R(z))$

5.1.2 否定型等值式(摩根律的推广)

$$\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$$

- 形式上看这对公式，是说否定词“ \neg ”可越过量词深入到量词的辖域内，但要把所越过的量词 \forall 转换为 \exists ， \exists 转换为 \forall

(1)从语义上说明

- $\neg(\forall x)P(x)$ 语义上表示的是，并非所有的 x 都具有性质 P 。这相当于，有一个 x 不具有性质 P ，这正是 $(\exists x)\neg P(x)$ 的含义。
- 由语义分析知 $\neg(\forall x)P(x)$ 与 $(\exists x)\neg P(x)$ 表示的是同一命题，自然有
$$\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$$
$$(\forall x)P(x)=\neg(\exists x)\neg P(x)$$
- 类似的有
$$\neg(\exists x)P(x)=(\forall x)\neg P(x)$$
$$(\exists x)P(x)=\neg(\forall x)\neg P(x)$$

说明

- $\neg(\forall x)P(x)$ 与 $(\forall x)\neg P(x)$ 不等值

如 $P(x)$ 表示 x 是有理数

前者的语义是并非所有的 x 都是有理数

后者的语义是说所有的 x 都不是有理数

这两句话是不同的

- $\neg(\exists x)P(x)$ 与 $(\exists x)\neg P(x)$ 也不等值

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)\neg P(x) = \neg(\forall x)P(x)$$

(2) 在 {1, 2} 域上分析

- $\neg(\forall x)P(x)$
 $= \neg(P(1) \wedge P(2))$
 $= \neg P(1) \vee \neg P(2)$
 $= (\exists x) \neg P(x)$
- $\neg(\exists x)P(x)$
 $= \neg(P(1) \vee P(2))$
 $= \neg P(1) \wedge \neg P(2)$
 $= (\forall x) \neg P(x)$

(3) 语义上的证明

- 依等值式定义， $A=B$ 如果在任一解释I下A真B就真，而且B真A就真。

若证明 $\neg(\forall x)P(x)=(\exists x)\neg P(x)$

1. 设任一解释I下有 $\neg(\forall x)P(x)=T$

从而 $(\forall x)P(x)=F$ ，即有一个 $x_0 \in D$ ，使 $P(x_0)=F$

于是 $\neg P(x_0)=T$

故在I下 $(\exists x)\neg P(x)=T$

2. 反过来，设任一解释I下有 $(\exists x)\neg P(x)=T$

即有一个 $x_0 \in D$ ，使 $\neg P(x_0)=T$

从而 $P(x_0)=F$

于是 $(\forall x)P(x)=F$

即 $\neg(\forall x)P(x)=T$

(4) 举例

例1 “并非所有的动物都是猫” 的表示

设 $A(x)$: x 是动物

$B(x)$: x 是猫

原语句可表示成 $\neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

依否定型公式得

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \\ &= (\exists x)\neg(A(x) \rightarrow B(x)) \\ &= (\exists x)\neg(\neg A(x) \vee B(x)) \\ &= (\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x)) \end{aligned}$$

而 $(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$ 的含义是有一个动物不是猫, 显然这句话与原语句等同

举例

例2 “天下乌鸦一般黑” 的表示

设 $F(x)$: x 是乌鸦

$G(x, y)$: x 与 y 是一般黑

原语句可表示成

$$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x,y))$$

不难知道与之等值的公式是

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))$$

即不存在 x, y 是乌鸦但不一般黑。这两句话含义是相同的。经计算有

举例

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y)) \\ &= (\forall x) \neg((\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y))) \\ &= (\forall x)(\forall y) \neg(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x,y)) \\ &= (\forall x)(\forall y)(\neg(F(x) \wedge F(y)) \vee G(x,y)) \\ &= (\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x,y)) \end{aligned}$$

5.2 量词分配等值式

5.2.1 量词对 \vee 、 \wedge 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

- 这是一组量词对 \vee 、 \wedge 的分配律，其中 q 是命题变项，与个体变元 x 无关，这是很重要的条件
- 我们仅对第一个等式给出证明，其余三个同样可证

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

- 设在一解释I下, $(\forall x)(P(x) \vee q) = T$, 从而对任一 $x \in D$, 有 $P(x) \vee q = T$
若 $q = T$, 则 $(\forall x)P(x) \vee q = T$
若 $q = F$, 从而对任一 $x \in D$, 有 $P(x) = T$, 即有 $(\forall x)P(x) = T$, 故仍有 $(\forall x)P(x) \vee q = T$
- 反过来, 设在一解释I下, $(\forall x)P(x) \vee q = T$
若 $q = T$, 则 $(\forall x)(P(x) \vee q) = T$
若 $q = F$, 必有 $(\forall x)P(x) = T$, 从而对任一 $x \in D$ 有 $P(x) = T$, 于是对任一 $x \in D$ 有 $P(x) \vee q = T$, 故 $(\forall x)(P(x) \vee q) = T$

5.2.2 量词对 \rightarrow 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

- 这是一组量词对 \rightarrow 的分配律，其中

p，**q**是命题变项，与个体变元**x**无关，这是很重要的条件

证明

- 先证明其中的第一个等式.

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q)$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \vee q)$$

$$= (\forall x)\neg P(x) \vee q \quad \text{依5.2.1的等值式}$$

$$= \neg(\exists x)P(x) \vee q \quad \text{依5.1.2的等值式}$$

$$= (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

证明

- 再证明其中的第三个等式

$$\begin{aligned} & (\forall x)(p \rightarrow Q(x)) \\ &= (\forall x)(\neg p \vee Q(x)) \\ &= \neg p \vee (\forall x)Q(x) \\ &= p \rightarrow (\forall x)Q(x) \end{aligned}$$

依5.2.1的等值式

- 其余两个等值式同样可证

5.2.3 量词 \forall 对 \wedge 、量词 \exists 对 \vee 的分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

- 这是当 $P(x)$ ， $Q(x)$ 都含有个体变元 x 时，量词 \forall 对 \wedge ，量词 \exists 对 \vee 所遵从的分配律。然而 \forall 对 \vee ， \exists 对 \wedge 的分配律一般并不成立

证明

(1) 证明 \forall 对 \wedge 的分配律

设在一解释I下, $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))=T$

于是对任一 $x \in D$, $P(x) \wedge Q(x)=T$

即 $P(x)=Q(x)=T$

从而有 $(\forall x)P(x)=(\forall x)Q(x)=T$

故有 $(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)=T$

反推回去, 易知在一解释I下, 只要

$(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)=T$

必有 $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))=T$

证明

(2) 证明 \exists 对 \vee 的分配律

设在一解释I下, $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))=T$

于是有 $x_0 \in D$ 使 $P(x_0) \vee Q(x_0)=T$

从而有 $P(x_0)=T$ 或 $Q(x_0)=T$ 也即

$(\exists x)P(x)$ 或 $(\exists x)Q(x)$ 为T

故有 $(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)=T$

反推回去, 易知在一解释I下, 只要

$(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)=T$

必有 $(\exists x)(P(x) \vee Q(x))=T$

证明

(3) 分析一下 \forall 对 \vee 分配律不成立的原因

先从 $\{1, 2\}$ 域上看. 有

$$\begin{aligned}(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) &= (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) \\ &= (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))\end{aligned}$$

$$\vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$$

$$\text{而 } (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = (P(1) \wedge P(2)) \vee (Q(1) \wedge Q(2))$$

于是有

$$(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$= (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$$

$$\text{然而 } (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (P(1) \wedge Q(1)) \wedge (P(2) \wedge Q(2))$$

$$= (P(1) \wedge P(2)) \wedge (Q(1) \wedge Q(2)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

说明

- 可看出 \forall 对 \wedge 的分配律，只涉及到 \wedge 和交换律，这是没有问题的， \forall 对 \vee 的分配律，涉及到 \wedge 和 \vee ，这是 \forall 对 \vee 分配律不成立的原因

- 从 $\{1, 2\}$ 域上的观察，可知

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

是成立的

将会看到该蕴涵关系在任意论域 D 上也是成立

证明

(4) 分析一下， \exists 对 \wedge 分配律不成立的原因

$$\begin{aligned} & (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = (P(1) \wedge Q(1)) \vee (P(2) \wedge Q(2)) \\ & (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \\ & = (P(1) \vee P(2)) \wedge (Q(1) \vee Q(2)) \\ & = (P(1) \wedge Q(1)) \vee (P(2) \wedge Q(2)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (P(2) \wedge Q(1)) \\ & = (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(1) \wedge Q(2)) \vee (P(2) \wedge Q(1)) \\ & (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \\ & = (P(1) \vee Q(1)) \vee (P(2) \vee Q(2)) \\ & = (P(1) \vee P(2)) \vee (Q(1) \vee Q(2)) \\ & = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \end{aligned}$$

说明

- 可看出 \exists 对 \vee 的分配律，只涉及到 \vee 和交换律，仍然是没问题的。 \exists 对 \wedge 的分配律，涉及到 \vee 和 \wedge ，这是 \exists 对 \wedge 分配律不成立的原因

- 从 $\{1, 2\}$ 域上的观察，可知

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

是成立的。

将会看到该蕴涵关系在任意论域 D 上也是成立的

说明

- 解释性的说明.

如下规定解释I:

x=1时, $P(1)=T$ 而 $Q(1)=F$.

x=2时, $P(2)=F$ 而 $Q(2)=T$.

对其他x属于D, 只要求P(x), Q(x)中只有一为T
在这个I下,

(1) 有 $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))=T$

而没有 $(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)=T$

(2) 有 $(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)=T$

而没有 $(\exists x)(P(x)\wedge Q(x))=T$

5.2.4 变元易名后的分配律

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

- 这两个等值式，说明了通过变元的易名，仍可实现 \forall 对 \vee ， \exists 对 \wedge 的分配律
- 证明是容易的。首先有变元易名等值式

$$(\forall x)P(x) = (\forall y)P(y)$$

$$(\exists x)P(x) = (\exists y)P(y)$$

$$\text{于是 } (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = (\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y)$$

分配律

- 对 x 而言 $(\forall y)Q(y)$ 相当于命题变项，与 x 无关，可推得

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall y)Q(y) = (\forall x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y))$$

对 y 而言， $P(x)$ 相当于命题变项与 y 无关，又可推得

$$(\forall x)(P(x) \vee (\forall y)Q(y)) = (\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$$

- 同理 $(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$

- 然而

$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$ 与 $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$ 是不等值的

$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y))$ 与 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 是不等值的

5.3 范式

- 在命题逻辑里，每一公式都有与之等值的范式
范式是一种统一的表达形式、当研究一个公式的特点(如永真、永假)时，范式起着重要的作用
- 对谓词逻辑的公式来说也有范式，其中前束范式与原公式是等值的，而其他范式与原公式只有较弱的关系

5.3.1 前束范式

- **定义5.3.1** 说公式**A**是一个前束范式，如果**A**中的一切量词都位于该公式的最左边(不含否定词)且这些量词的辖域都延伸到公式的末端，前束范式**A**的一般形式为

$$(Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)M(x_1, \dots, x_n)$$

其中 Q_i 为量词 \forall 或 \exists ($i=1, \dots, n$)，**M**称作公式**A**的母式(基式)，**M**中不再有量词

前束范式

- 定理**5.3.1** 谓词逻辑的任一公式都可化为与之等值的前束范式. 但其前束范式并不唯一
- 举例给出化前束范式的过程

举例

例 1 求 $\neg((\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \rightarrow (\exists x)(\neg(\forall y)Q(y,b) \rightarrow R(x)))$ 的前束范式.
可按下述步骤实现:

(1) 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$.

$$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b) \vee R(x)))$$

(2) \neg 内移 (反复使用摩根律)

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge \neg(\exists x)((\forall y)Q(y,b) \vee R(x)) \\ & = (\forall x)(\exists y)P(a,x,y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x)) \end{aligned}$$

(3) 量词左移 (使用分配等值式)

$$(\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists y)\neg Q(y,b) \wedge \neg R(x))$$

(4) 变元易名. (使用变元易名分配等值式)

$$\begin{aligned} & (\forall x)((\exists y)P(a,x,y) \wedge (\exists z)\neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ & = (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a,x,y) \wedge \neg Q(z,b) \wedge \neg R(x)) \\ & = (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a,b,x,y,z) \end{aligned}$$

前束范式

- 经过这几步，便可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持着等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的
- 这里的**S(a, b, x, y, z)**便是原公式的母式。其中**a, b**是自由个体变项
- 由于前束中量词的次序排列，以及对母式都没有明确的限制，自然前束范式不是唯一的，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a,b,x,y,z) \wedge P)$$

其中**P**可以是任一不含量词的普遍有效的公式

5.3.2 Skolem标准形

- 前束范式对前束量词没有次序要求，也没有其他要求
- 如果我们要求：
 - (1) 只保留全称量词而消去存在量词-- **Skolem标准形**
 - (2) 所有存在量词都在全称量词之左
 - (3) 所有全称量词都在存在量词之左
- 不难想像，仍保持与原公式的等值性就不可能了，只能保持在某种意义下的等值关系

Skolem标准形

- 仅保留全称量词的前束形
- 定理5.3.3 谓词逻辑的任一公式 A ，都可化成相应的**Skolem标准形**(只保留全称量词的前束形)，并且 A 是不可满足的当且仅当其**Skolem标准形**是不可满足的
- 这定理是说对不可满足的公式，它与其**Skolem标准形**是等值的，而一般的公式与其**Skolem标准形**并不是等值的。自然仅当 A 是不可满足的方使用**Skolem标准形**

举例

例3 求公式 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$ 的Skolem标准形

- 将一公式化成Skolem标准形，首先也要求出前束形。这个例子已是前束形了，便可直接求Skolem标准形了

例3 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x, y, z, u, v, w)$

- 首先将最左边的 $(\exists x)$ 消去，而将谓词 P 中出现的所有变元 x 均以论域中的某个常项 a (未在 P 中出现过)代入
- 进而消去从左边数第二个存在量词 $(\exists u)$ ，因 $(\exists u)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ ，需将谓词 P 中出现的所有变元 u 均以 y, z 的某个二元函数 $f(y, z)$ (未在 P 中出现过)代入
- 最后按同样的方法消去存在量词 $(\exists w)$ ，因 $(\exists w)$ 的左边有全称量词 $(\forall y)(\forall z)$ 和 $(\forall v)$ ，需将谓词 P 中出现的所有变元 w 均以 y, z, v 的某个三元函数 $g(y, z, v)$ (未在 P 中出现过也不同于 $f(y, z)$)代。
- 这样便得消去全部存在量词的Skolem标准形 $(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$

说明

- 消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，如 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 的Skolem标准形是 $(\forall x)P(x, f(x))$.
- 因为 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 的意思是对任一 x ，都有一个 y 使 $P(x, y)$ 成立，那么这个 y 通常是依赖于 x 的，可视作 x 的某个函数 $f(x)$ 。从而有Skolem标准形 $(\forall x)P(x, f(x))$
- 然而所能找到的 y 不必然是 x 的函数 f ，于是 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 与 $(\forall x)P(x, f(x))$ 并不等值

$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 与 $(\forall x)P(x, f(x))$ 不等值

- 在 $\{1, 2\}$ 域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$=(P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$=(P(1, 1) \wedge P(2, 1)) \vee (P(1, 1) \wedge P(2, 2))$$

$$\vee (P(1, 2) \wedge P(2, 1)) \vee (P(1, 2) \wedge P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

- 两者明显的不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的，这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的

作业一

P84 习题五

- 1(1, 3, 5, 7, 9)
 - 2(2, 4, 6, 8)
 - 4(1, 2, 3, 4, 5, 9, 10)
-

5.4 基本的推理公式

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵以及基本的推理公式的讨论和所用的术语，都可引入到谓词逻辑中。并可把命题逻辑的推理作为谓词逻辑推理的一个部分来看待
- 这里所介绍的是谓词逻辑所特有的，在命题逻辑里不能讨论的推理形式和基本的推理公式

5.4.1 推理形式举例

- 例1 所有的整数都是有理数，所有的有理数都是实数，所以所有的整数都是实数。

引入谓词将这三句话形式化，可得如下推理形式

$$\begin{aligned} & (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \\ & \rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) \end{aligned}$$

其中：

$P(x)$: x 是整数； $Q(x)$: x 是有理数； $R(x)$: x 是实数

举例

- 例2 所有的人都是要死的，孔子是人，所以孔子是要死的

引入谓词将这三句话形式化，可得如下推理形式

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(\text{孔子}) \rightarrow B(\text{孔子})$$

其中：

A(x): x是人； B(x): x是要死的

举例

- 例3 有一个又高又胖的人，必有一个高个子而且有一个胖子。

引入谓词将这两句话形式化，可得如下推理形式

$$(\exists x)(C(x) \wedge D(x)) \rightarrow (\exists x)C(x) \wedge (\exists x)D(x)$$

其中：

C(x): x是高个子； **D(x)**: x是胖子

举例

- 例4 若某一个体**a**具有性质**E**，那么所有的个体**x**都具有性质**E**.

这两句话形式化，可得如下推理形式：

$$E(a) \rightarrow (\forall x)E(x)$$

- 不难看出，由例1，2，3所建立的推理形式是正确的，而例4的推理形式是不正确的

说明

- 从而有

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(\text{孔子}) \Rightarrow B(\text{孔子})$$

$$(\exists x)(C(x) \wedge D(x)) \Rightarrow (\exists x)C(x) \wedge (\exists x)D(x)$$

- 这样的推理形式是命题逻辑所不能处理的，或说这些推理关系，仅使用命题逻辑的工具是无法描述的，需使用谓词逻辑的工具。

- 如例1所讨论的推理，在命题逻辑里只能形式化成 三个独立命题 p , q , r 间的推理形式

$$p \wedge q \rightarrow r$$

这显然不是正确的推理形式

5.4.2 基本的推理公式

$$(1) (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(2) (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

$$(3) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(4) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$(5) (\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$(6) (\forall x)(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$$

$$(7) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \\ \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$(8) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(a) \Rightarrow Q(a)$$

$$(9) (\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$$

$$(10) (\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

注：这些推理公式或称推理定理的逆一般是不成立的，所以正确地理解这些定理的前提与结论的不同是重要的

5.4.3 基本推理公式的说明

- 仅就其中的2, 3和10来讨论

$$(2)(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

这定理在 $\{1, 2\}$ 域上是成立的, 已在5.2.3节作了说明, 再从语义上讨论

如果个体域是某班学生, $P(x)$ 表 x 是高材生. $Q(x)$ 表 x 是运动健将, 那么 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ 表这个班上有一个学生既是高材生又是运动健将.

而 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$ 只是说这个班上有一个高材生而且有一个运动健将, 但不要求高材生和运动健将是同一个学生

$$(2) (\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

- 显然推理式是成立的，其结论比前提明显地要求弱了。从而这推理式的逆是不成立
- 不难给出解释性的证明

设解释I下有 $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) = T$ 。

即有 $x_0 \in D$ 使 $P(x_0) \wedge Q(x_0) = T$

从而有 $P(x_0) = T$ ， $Q(x_0) = T$

也即 $(\exists x)P(x) = T$ ， $(\exists x)Q(x) = T$

从而有 $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) = T$

$$(3) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

- 从语义上讨论. 论域仍是某班的学生.
- 为使 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$, 论域内学生分布只有两种可能, 一是班上所有学生都是高材生又都是运动健将; 一是班上有的学生不是高材生, 但凡高材生必是运动健将。这两种情况下都有 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$
- 然而这推理式的逆是不成立的, 仅当班上有的高材生不是运动健将, 而且又有的学生不是高材生时, 有 $(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$. 而 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = F$

$$(3) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

■ 解释性的证明

设在一解释I下，有

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$$

从而对任一 $x \in D$, $P(x) \rightarrow Q(x) = T$.

必能保证 $(\forall x)P(x) = T$ 时有 $(\forall x)Q(x) = T$

从而有

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$$

(10) $(\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$

- 这定理在 $\{1, 2\}$ 域上是成立的, 已在4.5. 2节作了说明, 从语义上讨论

- 如论域为实数域上的区间 $[-1, 1]$, 而 $P(x, y)$ 表示 $x \cdot y = 0$.

这时 $(\exists x)(\forall y)P(x, y) = T$. 因为取 $x = 0$, 对所有的 y 都有 $x \cdot y = 0$.

自然有 $(\forall y)(\exists x)P(x, y) = T$, 因对所有的 y , 均取 $x = 0$ 便有 $x \cdot y = 0$ 成立

- 这定理的逆是不成立的

如取 $P(x, y)$ 表示 $x + y = 0$, 这时

$(\forall y)(\exists x)P(x, y) = T$, 而 $(\exists x)(\forall y)P(x, y) = F$

$$(10) (\exists x)(\forall y)P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x, y)$$

■ 解释性的证明

设一解释I下，有 $(\exists x)(\forall y)P(x, y)=T$ ，于是有 $x_0 \in D$ ，使对一切的 $y \in D$ 都有

$$P(x_0, y)=T.$$

从而对一切的 $y \in D$ ，都有一个 x (均选为 x_0)使 $P(x, y)=T$ ，即 $(\forall y)(\exists x)P(x, y)=T$

5.5 推理演算

- 命题逻辑中引入推理规则的推理演算，可推广到谓词逻辑，有关的推理规则都可直接移入到谓词逻辑，除此之外还需介绍4条有关量词的消去和引入规则
- 代入规则需补充说明：
包括命题变项、自由个体变项和谓词变项的代入，要求保持合式公式和普遍有效性不被破坏

5.5.1 推理规则

(1) 全称量词消去规则

- $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ ，其中 y 是论域中一个个体
意指如果所有的 $x \in D$ 都具有性质 P ，那么 D 中任一个体 y 必具有性质 P 。
- 当 $P(x)$ 中不再含有量词和其他变项时，这条规则明显成立。

而当允许 $P(x)$ 中可出现量词和变项时，需限制 y 不在 $P(x)$ 中约束出现(即右侧量不在左侧约束出现)

- 设 $P(x) = (\exists y)(x < y)$ ，
则 $(\forall x)P(x) = (\forall x)((\exists y)(x < y))$ 在实数上成立
不应有 $(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ ，因为 $P(y) = (\exists y)(y < y)$ 是矛盾式。
这时， y 在 $P(x)$ 中是约束出现了

(2) 全称量词引入规则

- $P(y) \Rightarrow (\forall x)P(x)$, 其中 y 是论域中 **任一个体**
意指如果任一个体 y (自由变项) 都具有性质 P ,
那么所有个体 x 都具有性质 P
- 仍需限制 x 不在 $P(y)$ 中约束出现 (即右侧量不在左侧约束出现)
- 如 $P(y) = (\exists x)(x > y)$ 在实数域上成立,
 $(\forall x)P(x) = (\forall x)((\exists x)(x > x))$ 是不成立的

(3) 存在量词消去规则

- $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$, 其中 c 是论域中的一个个体 **常项**
意指如果论域中存在有个体具有性质 P , 那么必有某个个体 c 具有性质 P
- 需限制 $(\exists x)P(x)$ 中没有自由个体出现
如实数域上 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(x > y)$ 是成立的, y 是自由个体, 这时不能推导出 $P(c) = c > y$
- 还需限制 $P(x)$ 中不含有 c . 如在实数域上
 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(c < x)$ 是成立的, $P(c) = c < c$ 不成立
- 思考方式
先定 P , 再定 c , 最后讨论 $(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ 的正确性

(4) 存在量词引入规则

- $P(c) \Rightarrow (\exists x)P(x)$, 其中 c 是论域中一个个体常项
意指如果有个体常项 c 具有性质 P , 那么 $(\exists x)P(x)$ 必真
- 需限制 x 不出现在 $P(c)$ 中. 如实数域上, $P(0) = (\exists x)(x > 0)$ 成立, 但 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(\exists x)(x > x)$ 是不成立的

推理规则

- 这4条推理规则是基本的，对多个量词下的量词消去与引入规则的使用也已谈到。再明确说明一下
 - $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)P(x, y)$
的右端，不允许写成 $(\exists y)P(y, y)$
 - $(\forall x)P(x, c) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x, y)$
的右端，不允许写成 $(\exists x)(\forall x)P(x, x)$

推理规则

- $(\forall x)(\exists y)P(x, y) \Rightarrow (\exists y)P(x, y) \Rightarrow P(x, a)$

但不允许再推演出 $(\forall x)P(x, a)$ 和 $(\exists y)(\forall x)P(x, y)$

原因是 $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ 成立时，所找到的 y 是依赖于 x 的，从而 $P(x, y)$ 的成立是有条件的，不是对所有的 x 对同一个 y 都有 $P(x, y)$ 成立，于是不能再推演出 $(\forall x)P(x, y)$

5.5.2 使用推理规则的推理演算举例

- 和命题逻辑相比，在谓词逻辑里使用推理规则进行推理演算同样是方便的，然而在谓词逻辑里，真值表法不能使用，又不存在判明 $A \rightarrow B$ 是普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理方法已是谓词逻辑的基本推理演算方法
- 推理演算过程
 - 首先是将以自然语句表示的推理问题引入谓词形式化
 - 若不能直接使用基本的推理公式便消去量词
 - 在无量词下使用规则和公式推理
 - 最后再引入量词以求得结论

举例

例1 前提 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$

结论 $(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

证明

- | | | |
|---|--------|-------------|
| $(1)(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ | 前提 | |
| $(2)P(x) \rightarrow Q(x)$ | | 全称量词消去 |
| $(3)(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$ | 前提 | |
| $(4)Q(x) \rightarrow R(x)$ | | 全称量词消去 |
| $(5)P(x) \rightarrow R(x)$ | | (2), (4)三段论 |
| $(6)(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ | 全称量词引入 | |

举例

例2 所有的人都是要死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是要死的。

首先引入谓词形式化，令 $P(x)$ 表 x 是人， $Q(x)$ 表 x 是要死的，于是问题可描述为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(\text{苏格拉底}) \rightarrow Q(\text{苏格拉底})$$

证明

(1) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

前提

(2) $P(\text{苏格拉底}) \rightarrow Q(\text{苏格拉底})$

全称量词消去

(3) $P(\text{苏格拉底})$

前提

(4) $Q(\text{苏格拉底})$

(2), (3)分离

举例

例3 前提 $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$, $(\exists x)P(x)$
结论 $(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$

证明

- | | |
|--|------------|
| (1) $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$ | 前提 |
| (2) $(\exists x)P(x)$ | 前提 |
| (3) $(\forall x)((P(x) \vee Q(x)) \rightarrow R(x))$ | (1), (2)分离 |
| (4) $P(c)$ | (2)存在量词消去 |
| (5) $P(c) \vee Q(c) \rightarrow R(c)$ | (3)全称量词消去 |
| (6) $P(c) \vee Q(c)$ | (4) |
| (7) $R(c)$ | (5), (6)分离 |
| (8) $(\exists x)R(x)$ | (7)存在量词引入 |
| (9) $(\exists y)R(y)$ | (7)存在量词引入 |
| (10) $(\exists x)R(x) \wedge (\exists y)R(y)$ | (8), (9) |
| (11) $(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y))$ | (10)置换 |

举例

例4 分析下述推理的正确性

- (1) $(\forall x)(\exists y)(x > y)$ 前提
- (2) $(\exists y)(z > y)$ 全称量词消去, y 与 z 有关
- (3) $z > b$ 存在量词消去, b 依赖 z
- (4) $(\forall z)(z > b)$ 全称量词引入, b 不依赖 z
- (5) $b > b$ 全称量词消去
- (6) $(\forall x)(x > x)$ 全称量词引入

推理(1)到(2), 应明确指出 y 是依赖于 x 的, 即(2)中 y 和 z 有关.
(2)到(3), 其中的 b 是依赖于 z 的, 从而(3)到(4)是不成立的.

又由于 b 是常项, (5)到(6)也是不允许的, 因个体常项不能用全称量词量化

举例

例5 有的病人喜欢所有的医生，没有一个病人喜欢某一庸医，所以没有医生是庸医。

先形式化。令 $P(x)$ 表 x 是病人， $Q(x)$ 表 x 是庸医。 $D(x)$ 表 x 是医生， $L(x, y)$ 表 x 喜欢 y ，

第一句话可描述为

$$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

第二句话可描述为

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$$

或写成

$$\neg(\exists x)(P(x) \wedge (\exists y)(Q(y) \wedge L(x, y)))$$

结论可描述为

$$(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

或写成

$$\neg(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$$

例5

证明

(1) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$ 前提

(2) $P(c) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(c, y))$

(3) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$

(4) $P(c) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$

(5) $P(c)$

(6) $(\forall y)(D(y) \rightarrow L(c, y))$

(7) $D(y) \rightarrow L(c, y)$

(8) $(\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$

(9) $Q(y) \rightarrow \neg L(c, y)$

(10) $L(c, y) \rightarrow \neg Q(y)$

(11) $D(y) \rightarrow \neg Q(y)$

(12) $(\forall y)(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$

(13) $(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

存在量词消去

前提

全称量词消去

(2)

(2)

全称量词消去

(4), (5)分离

全称量词消去

(9)置换

(7), (10)三段论

全称量词引入

(12)置换

5.6 谓词逻辑的归结推理法

- 归结方法可推广到谓词逻辑，困难在于出现了量词、变元。证明过程同命题逻辑，只不过每一步骤都要考虑到有变元，从而带来复杂性
- 使用推理规则的推理演算过于灵活，技巧性强，而归结法较为机械，容易使用计算机来实现

5.6.1 归结证明过程

- 为证明 $A \rightarrow B$ 是定理(A, B 为谓词公式), 即 $A \Rightarrow B$, 等价的是证明 $A \wedge \neg B = G$ 是矛盾式, 这是归结法的出发点(反证法)
- 建立子句集 S 。如何消去 G 中的量词, 特别是存在量词, 是建立子句集 S 的关键。办法是
 - 先将 G 化成等值的前束范式, 进而将这前束形化成Skolem标准形, 消去存在量词(以常项代替如 a), 得仅含全称量词的公式 G' (曾指出 G 与 G' 在不可满足的意义下是一致的, 从而对 G 的不可满足性. 可由 G' 的不可满足性来求得)
 - 再将 G' 中的全称量词省略, G' 母式(已合取范式化)中的合取词 \wedge 以“,”表示, 便得 G 的子句集 S . 而 S 与 G 是同时不可满足的, S 中的变元视作有全称量词作用着

归结过程

- 对S作归结

设 C_1, C_2 是两个无共同变元的子句, L_1, L_2 分别是 C_1, C_2 中的文字, 如果 L_1 和 $\neg L_2$ 有合一置换 σ , 则

$$(C_1\sigma - \{L_1\sigma\}) \cup (C_2\sigma - \{L_2\sigma\})$$

称作子句 C_1, C_2 的归结式.

如 $C_1 = P(x) \vee Q(x), C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

$P(x)$ 与 $\neg P(a)$, 在合一置换 $\{x / a\}$ 下将变元 x 换成 a , 便为互补对可作归结了, 有归结式

$$R(C_1, C_2) = Q(a) \vee R(y)$$

对子句集S的任两子句作归结(如果可作归结). 并将归结式仍放入S中. 重复这过程.

- 直至归结出空子句“ \square ”, 得到矛盾, 证明结束

5.6.2 归结法证明举例

例1 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

首先写出公式G

$G = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)) \wedge \neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$

为求G的子句集S，可分别对 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ ， $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$ ， $\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$ 作子句集，然后求并集来作为G的“子句集”（这个“子句集”不一定是S，但与S同时是不可满足的，而且较之来得简单，于是为方便可将这个“子句集”视作S）

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的子句集为 $\{\neg P(x) \vee Q(x)\}$

$(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$ 的子句集为 $\{\neg Q(x) \vee R(x)\}$

$\neg(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x)) = (\exists x) \neg(\neg P(x) \vee R(x))$
 $= (\exists x)(P(x) \wedge \neg R(x))$

Skolem化，得子句集 $\{P(a), \neg R(a)\}$

于是G的子句集

$S = \{\neg P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee R(x), P(a), \neg R(a)\}$

例1

$$S = \{ \neg P(x) \vee Q(x), \neg Q(x) \vee R(x), P(a), \neg R(a) \}$$

证明S是不可满足的，有归结过程：

(1) $\neg P(x) \vee Q(x)$

(2) $\neg Q(x) \vee R(x)$

(3) $P(a)$

(4) $\neg R(a)$

(5) $Q(a)$

(6) $R(a)$

(7) \square

(1)(3)归结

(2)(5)归结

(4)(6)归结

例2

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x, y)))$$

$$A_2 = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x, y)))$$

$$B = (\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

求证 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$

证明: 不难建立

A_1 的子句集为 $\{P(a), \neg D(y) \vee L(a, y)\}$

A_2 的子句集为 $\{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)\}$

$\neg B$ 的子句集为 $\{D(b), Q(b)\}$,

求并集得子句集 S , 进而建立归结过程:

(1) $P(a)$

(2) $\neg D(y) \vee L(a, y)$

(3) $\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg L(x, y)$

(4) $D(b)$

(5) $Q(b)$

(6) $L(a, b)$

(2)(4)归结

(7) $\neg Q(y) \vee \neg L(a, y)$

(1)(3)归结

(8) $\neg L(a, b)$

(5)(7)归结

(9) \square

(6)(8)归结

作业二

P84 习题五

- $3(7, 8, 9, 10, 11, 12)$
 - $5(1, 2, 3, 4)$
-