图论

主要内容

- 《图论与代数结构》
  - 第一章 基本概念

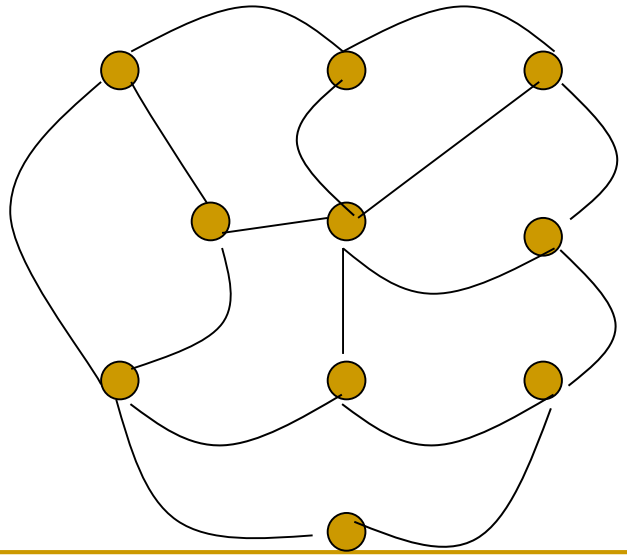
    1.1, 1.2(1,2,3,7)
  - 第二章 道路与回路

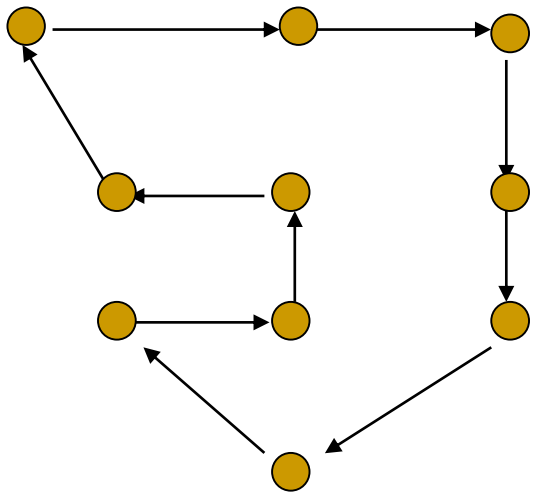
    2.1, 2.3, 2.4
  - 第三章 树

    3.1, 3.6, 3.7

实例

- 城市街道如图，市政府规定各街道只能单向行驶，问如何定向才能保证车辆能从一个地点到达任一个其他的地点。





第一章　基本概念

1.1 图的概念

- 许多事物以及它们之间的联系可以用图形直观地表示
- 用结点表示事物

  用边表示它们之间的联系
- 图论的研究对象

  结点和边构成的图形

图的概念

- 定义1.1.1

  二元组(V(G),E(G))称为图。其中，

  V(G)是非空集合，称为结点集

  E(G)是V(G)诸结点之间边的集合

  常用G=(V,E)表示图

- 只讨论有限图, 即V和E都是有限集

  给定某个图G=(V, E), 如果不加特殊说明, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$

  即结点数|V|=n, 边数|E|=m

边和图

- 用结点表示边

  $e_k=(v_i, v_j)$ (称v_i和v_j是相邻结点, 或者e_k分别与v_i,v_j相关联)
- 有向边(弧)，有向图

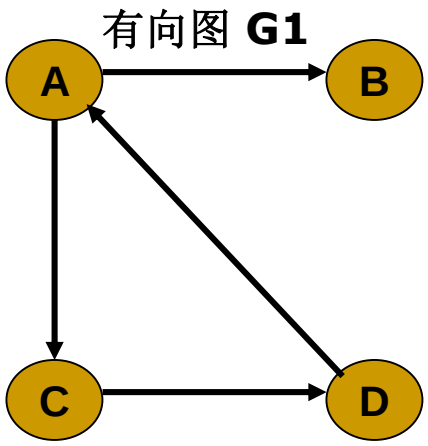
  v_i是e_k的始点，v_j是e_k的终点
- 无向边，无向图

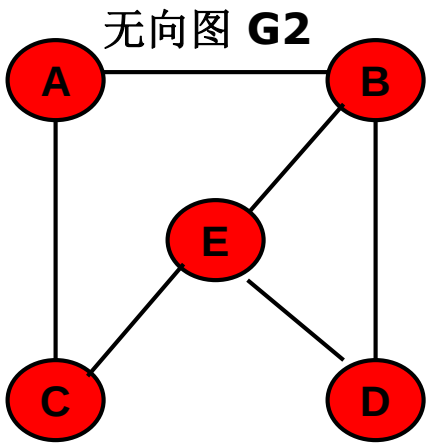
  v_i , v_j是e_k的端点
- 自环(圈)

  只有一个结点相关联的边
- 重边、多重图

  同一对结点之间存在多条边

有向图与无向图





G1 =（V1, E1）

V1 = {A, B, C, D}

E1 = {(A,B), (A,C), (C,D), (D,A)}

G2 =（V2, E2)

V2 = {A, B, C, D, E}

E2 = {(A,B), (A,C), (B,D), (B,E), (C,E), (D,E)}

图的概念

- 定义1.1.2

  G=(V,E)的某结点v所关联的边数称为该结点的度，用d(v)表示。如果v带有自环，则自环对d(v)的贡献为2

- 有向图

  出度(正度)$d^+(v)$: 以结点v为始点的边的数目

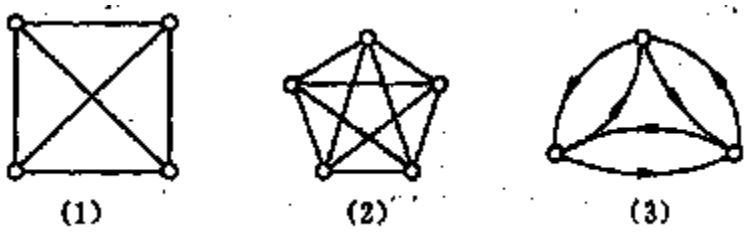
  入度(负度)$d^-(v)$: 以结点v为终点的边的数目

  $d(v) = d^+(v)+d^-(v)$

图的概念

- 定义1.1.3

  任意两结点间最多只有一条边，且不存在自环的无向图称为简单图
- 没有任何边的简单图(V, Ø)叫空图，用N_n表示. 若此时恰有|V|=1, 称为平凡图
- 任何两个结点间都有边的简单图称为完全图，用K_n表示. K_n中每个结点的度都是n-1



图的概念

- 性质1.1.1
  设G=(V, E)有n个结点，m条边，则

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

证明：由于每条边e=(u,v)对结点u和v度的贡献各为1，因此m条边对全部结点的总贡献率为2m

图的概念

- 性质1.1.2

  G中度为奇数的结点必为偶数个.

证明：G中任一结点的度或为偶数或为奇数，设V_e 是度为偶的结点集，V_o是度为奇的结点集，于是有

$$\sum_{v\in V_e} d(v) + \sum_{v\in V_0} d(v) = 2m$$

因此上式左边第二项也为偶数，也即度为奇数的结点必为偶数个

图的概念

- 性质1.1.3

  有向图G中正度之和等于负度之和.

这是因为每条边对结点的正、负度贡献各为1

- 性质1.1.4

  K_n的边数是n(n-1)/2.

证明: K_n中各结点的度都是(n-1), 由性质1.1.1就可以得到

图的概念

- 性质1.1.5

  非空简单图G中一定存在度相同的结点.

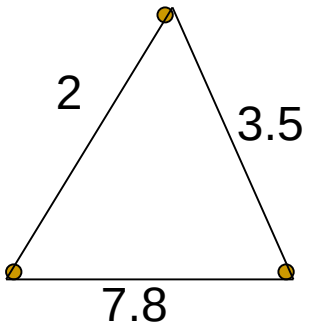
证明：设在G中不存在孤立结点，则对n个结点的简单图，每个结点度d(v)的取值范围是1~(n-1)，由抽屉(鸽巢)原理，一定存在两个度相同的结点．若存在一个孤立的结点，亦类似可证.

图的概念

- 定义1.1.4

  如果图G=(V,E)的每条边$e_k=(v_i, v_j)$ 都赋以一个实数w_k作为该边的权，则称G是赋权图．特别地，如果这些权都是正实数，就称G是正权图

- 权可以表示该边的长度、时间、费用或者容量等



图的概念

- 定义1.1.5

  给定G=(V, E), 如果存在另一个G’=(V’, E’), 满足V’⊆V, E’ ⊆ E, 则称G’是G的一个子图

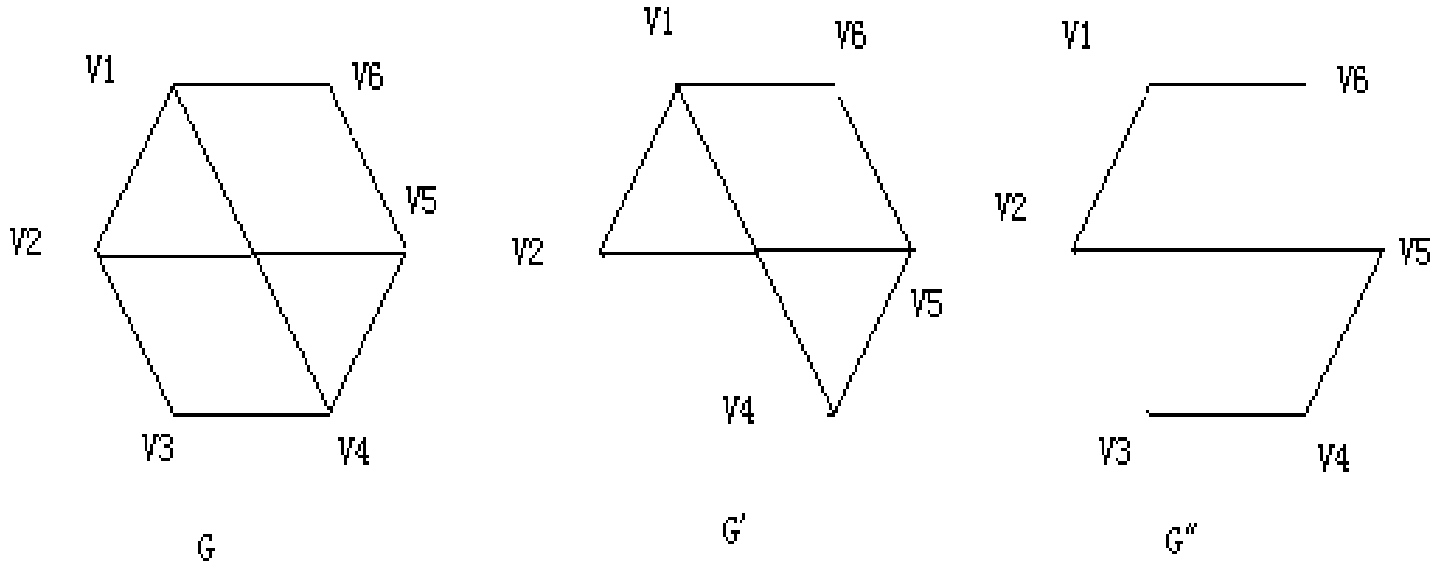
  特别地，如果V’=V, 就称G’是G的支撑子图或者生成子图

  如果V’⊆V, 且E’包含了G在结点子集V’之间的所有边, 则称G’是G的导出子图
- G自身既是支撑子图，又是导出子图；

  空图是G的导出子图；

  G自身和空图称为平凡子图

- 在如下图中，给出了图G以及它的真子图G’和G’’，其中，G’是结点集为{v_1，v_2，v_4，v_5，v_6}的导出子图;
  G’’是支撑子图(或生成子图)。

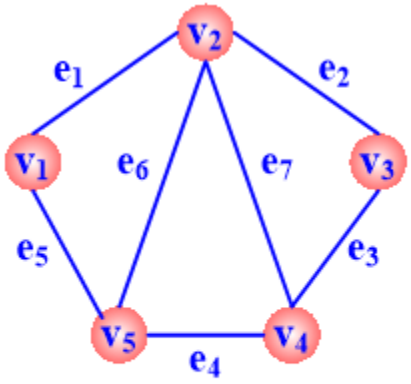


图的概念

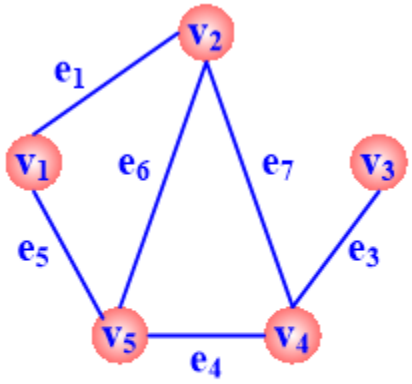
- 定义1.1.6
  给定两个图$G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$.令
  $G_1\cup G_2=(V,E)$,其中$V=V_1\cup V_2,E=E_1\cup E_2$;
  $G_1\cap G_2=(V,E)$,其中$V=V_1\cap V_2,E=E_1\cap E_2$;
  $G_1\oplus G_2=(V,E)$,其中$V=V_1\cup V_2,E=E_1\oplus E_2$;
  分别称为G_1和G_2的并，交和对称差

图的增删

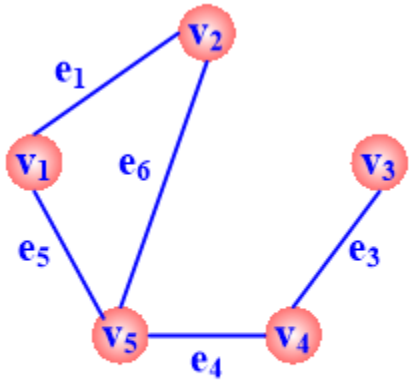
- G-H
  表示在G中删去一个子图H，即删掉H中的各条边(支撑子图)
  特别地，对于简单图G，称K_n-G为G的补图
- G-v
  表示从G中删去结点v及其关联的边(导出子图)
- G-e
  表示从G中删去边e(支撑子图)
- G+e_{ij}
  表示在G中增加某条边$e_k=(v_i, v_j)$



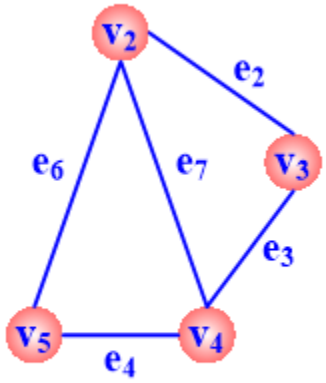
G



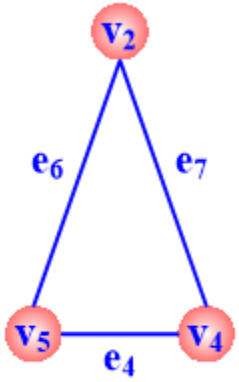
$G-e_2$



$G-\{e_2, e_7\}$



$G-v_1$



$G-\{v_1, v_3\}$

图的概念

- 无向图的邻点集

  $\Gamma(v)=\{u|(v, u)\in E\}$

- 定义1.1.7

  设v是有向图G的一个结点，则

  $\Gamma^{+}(v)=\{u|(v, u)\in E\}$

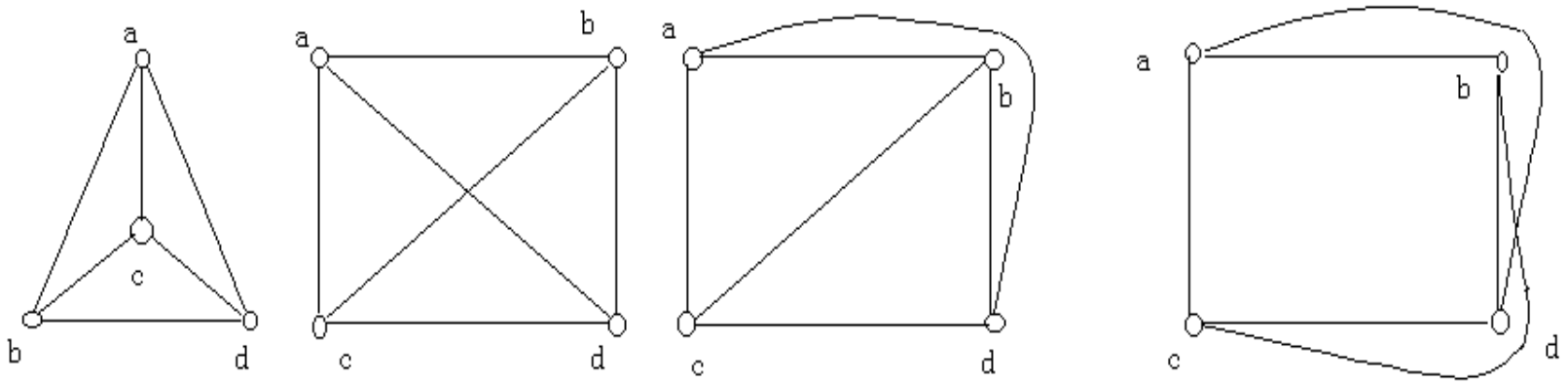
  称为v的直接后继集或者外邻集; 相应地

  $\Gamma^{-}(v)=\{u|(u, v)\in E\}$

  称为v的直接前趋集或者内邻集

图的同构

如下四张图所表示的图形实际上都是一样的



图的同构

- 定义1.1.8

  两个图$G_1=(V_1, E_1)$, $G_2=(V_2, E_2)$,如果V_1和V_2之间存在双射f, 而且$(u, v)\in E_1$, 当且仅当$(f(u), f(v))\in E_2$时, 称G_1和G_2同构

  记作$G_1\cong G_2$

- 如何判断两个图是否同构呢？

  答案：迄今为止还没有有效的算法（？）

- ***最新进展：László Babai 提出了一个接近多项式时间的算法。***

图的同构

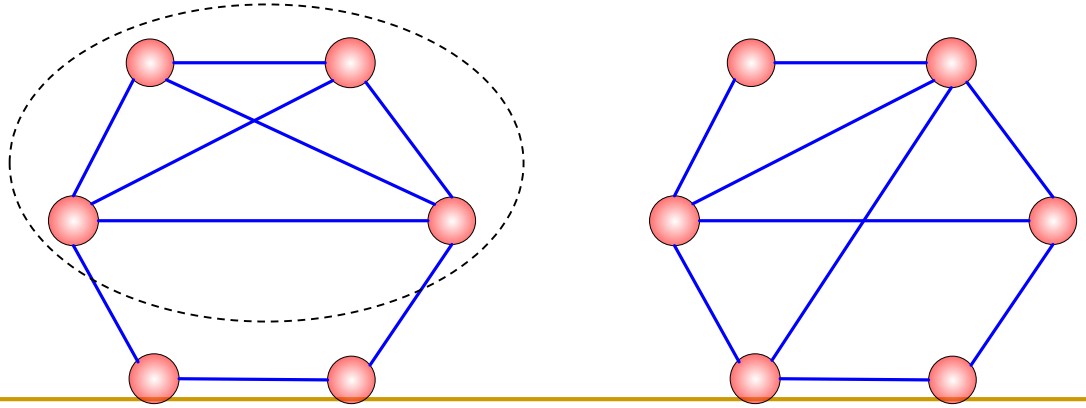
假如$G_1 \cong G_2$，则必须满足：

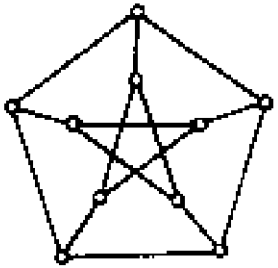
(1) $|V(G_1)|=|V(G_2)|$, $|E(G_1)|=|E(G_2)|$

(2) G_1和G_2结点度的非增序列相同

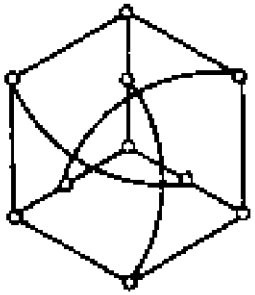
(3) 存在同构的导出子图(用来判断不同构)

上述是必要条件,但不是充分条件，只能用来判断图的不同构。例如下面两个图是不同构的。

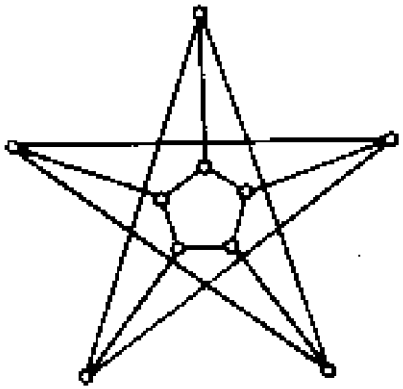




(d)



(e)



(f)

(d)≅(e)≅(f). (d)所示图称为彼德森图

1.2 图的代数表示

- 邻接矩阵
- 权矩阵
- 关联矩阵
- 邻接表

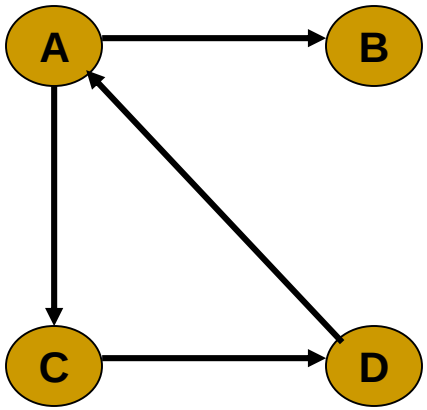
邻接矩阵

- 邻接矩阵表示结点之间的邻接关系
  - 无权值的有向图的邻接矩阵

    设有向图具有n个结点，则用n行n列的布尔矩阵A表示该有向图；并且A[i,j]=1, 如果i至j有一条有向边；A[i,j]=0, 如果i至j没有一条有向边

    v_i出度: i行之和; v_j入度: j列之和

    注: 可以表示自环，但无法表示重边



表示成右图矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵

- 无权值的无向图的邻接矩阵(对称矩阵)

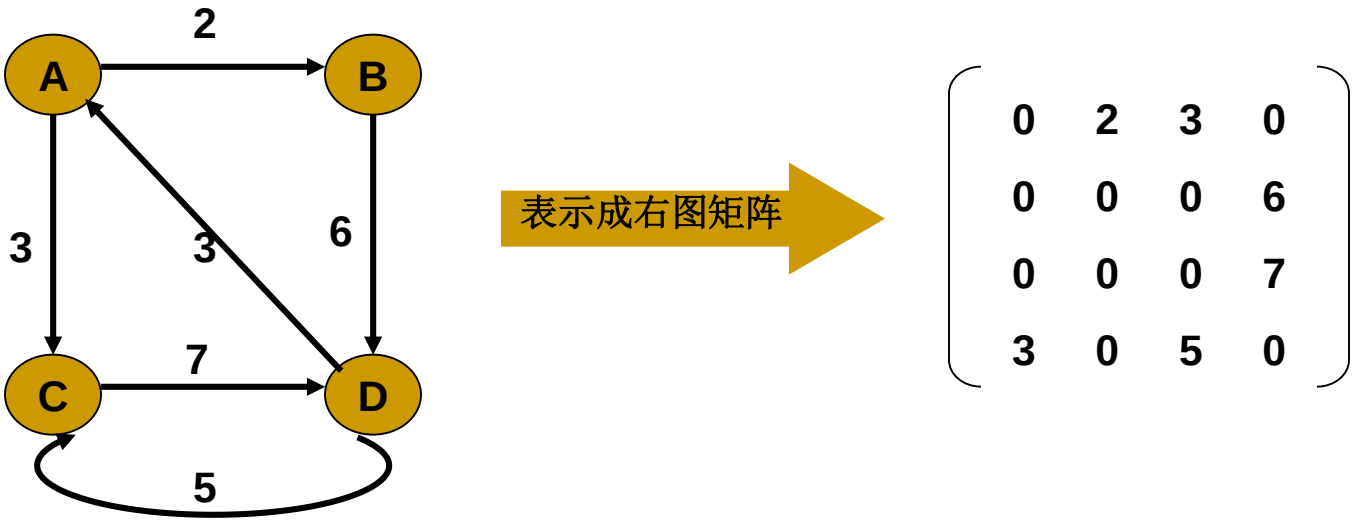
  设无向图具有n个结点，则用n行n列的布尔矩阵 A 表示该无向图；并且A[i,j]=1，如果i至j有一条无向边；A[i,j]=0, 如果i至j没有一条无向边

  v_i结点的度: i行或i列之和

权矩阵

- 用来表示赋权图
  - 例如：有向图的加权邻接矩阵

设有向图具有n个结点，则用n行n列的矩阵 A 表示该有向图；
并且 A[i,j]=w_{ij} , 如果i至j有一条有向边且它的权值为w_{ij};
A[i,j]=0, 如果i至j没有一条有向边



关联矩阵

- 关联矩阵表示结点与边之间的关联关系
- 设G=(V, E), |V|=n, |E|=m. 则G的关联矩阵B是n×m的矩阵
- 有向图的关联矩阵

  B[i,j]=1,　如果v_i是边$e_j=(v_i,v_k)$的始点

  B[i,j]=-1, 如果v_i是边$e_j=(v_k,v_i)$的终点

  B[i,j]=0,　其他(v_i既不是e_j的始点亦非终点)

关联矩阵

- 有向图关联矩阵的性质
  - 每列只有两个非零元：1和-1
  - 第i行非零元的数目恰是结点v_i的度，其中1元的数目是出度，-1元的数目是入度
  - 能够表示重边，但不能表示自环

关联矩阵

- 无向图的关联矩阵

  B[i,j]=1,　如果v_i是边e_j的端点

  B[i,j]=0,　如果v_i不是边e_j的端点

矩阵表示的特点

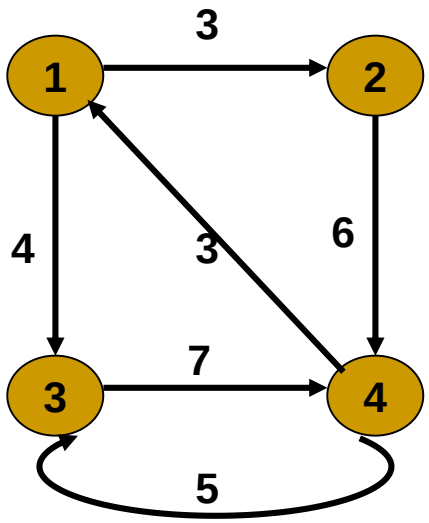
- 如果可以用邻接矩阵/关联矩阵表示某个图G,则表示是唯一的
- 邻接矩阵不能表示重边

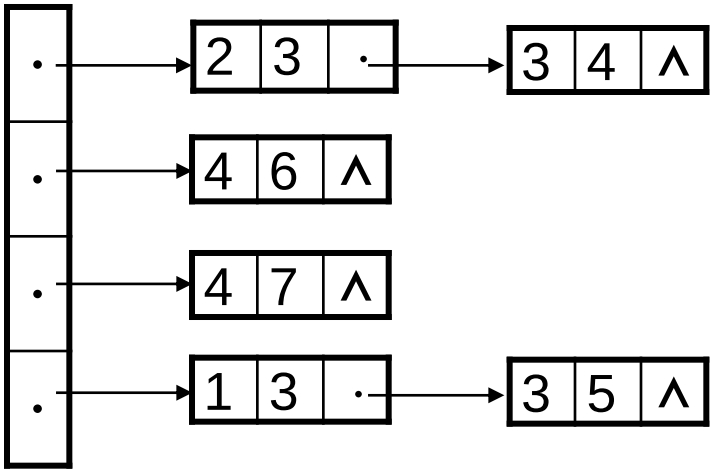
  关联矩阵不能表示自环
- 从数据结构和算法的角度来看，矩阵表示法占据的存储空间较大，可能增加计算复杂度

邻接表

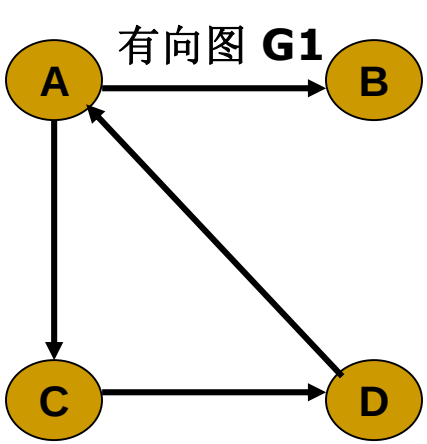
- 单链表
- 表结点的结构

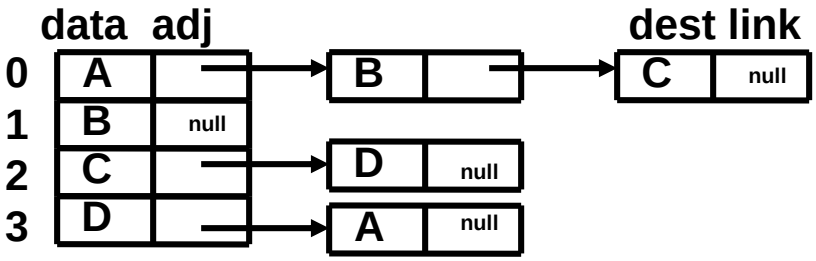
邻接点的编号	边权值	下一个结点的地址指针

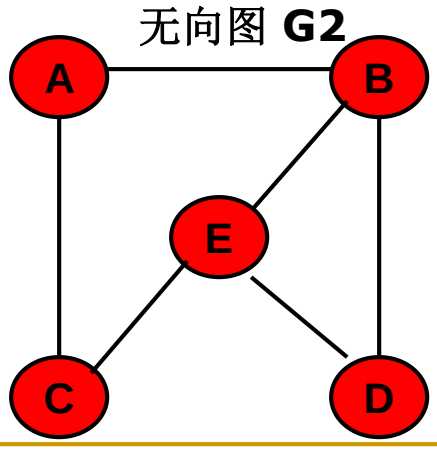


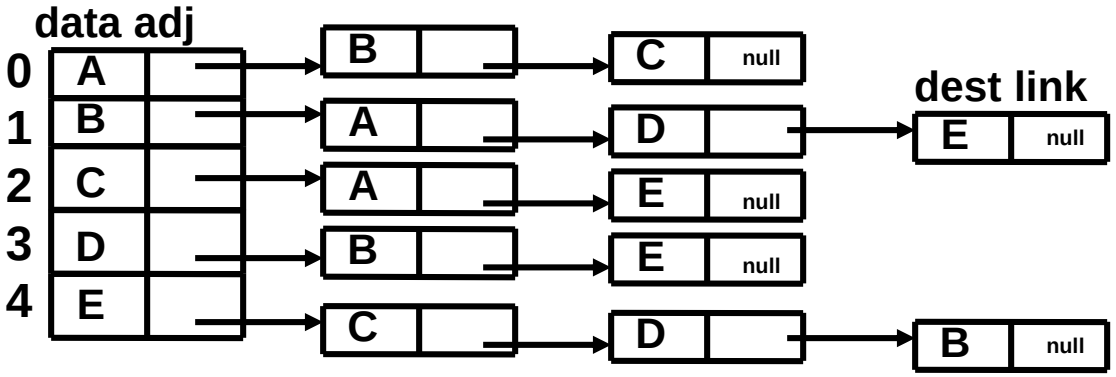


邻接表


有向图 G1
A
B
C
D


data adj
dest link
0
1
2
3
A
B
C
D
null
null
null
null
B
C
D
A
null
null
null


无向图 G2
A
B
E
C
D


data adj
dest link
0
1
2
3
4
A
B
C
D
E
B
A
A
B
C
C
D
E
E
D
null
null
null
null
null
null
null
null
null
E
null
B
null

邻接表

- 特点
  - 便于增加和删除边
  - 可以表示重边和自环
  - 可以唯一表示任意一个图
  - 所需存储空间较小

图的应用

- 三个量杯容量分别是8升，5升，3升，现8升的量杯装满了水，问怎样才能把水分成2个4升的。

初始状态(8,0,0)，终止状态(4,4,0)

状态转移图：状态看作点，状态间的转化看作边

答案: (8,0,0)→(5,0,3)→(5,3,0)→(2,3,3)
→(2,5,1)→(7,0,1)→(7,1,0)→(4,1,3)→(4,4,0)

图的应用

- 人狼羊菜过河

  有一个人带着一只狼，一只羊，一筐菜过河，当这个人在狼和羊身边时，狼不敢吃羊，羊也不敢吃菜，但是当人不在它们身边时，狼就可能把羊吃掉，羊也可能把菜吃掉，现在，渡船时只有一只船，能承载一个人及一件东西或物品，问怎样渡才能使人.狼.羊.菜安全过河？

使用有限状态机，初始状态(0,0,0,0)，终止状态(1,1,1,1)

答案：

1、人羊坐船过河
2、人单独回
3、人白菜过河
4、人羊一起回
5、人狼过河
6、人单独回
7、人羊过河

作业

- P9

  1

  2

  3

  7

  8(邻接矩阵、关联矩阵)